

Comprensión del conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales a través de una trayectoria hipotética de aprendizaje

Understanding the solution set of systems of linear equations through a hypothetical learning trajectory

Elizabeth Rozas-Torres¹

¹Universitat Autònoma de Barcelona, Universidad Austral de Chile, elizabeth.rozas@uach.cl, <https://orcid.org/0000-0002-8204-2938>, Chile.

Información del Artículo

Trazabilidad:

Recibido 01-07-2026

Revisado 22-07-2026

Aceptado 01-08-2026

Palabras Clave:

Sistemas de ecuaciones lineales

Álgebra lineal

Trayectorias Hipotéticas de

Aprendizaje

Educación superior

Educación en Ingeniería

RESUMEN

Este estudio tuvo como objetivo identificar dimensiones que favorecen la comprensión del conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales de estudiantes de primer año de ingeniería cuando se usa una THA. El fundamento teórico se basa en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y en la heurística de diseño de modelos emergentes. Se implementó una investigación basada en diseño con 25 estudiantes universitarios de primer año que estaban cursando Álgebra Lineal. Los participantes resolvieron cuatro tareas de aprendizaje sobre sistemas de ecuaciones lineales. Los resultados muestran que la comprensión del conjunto solución no se desarrolla únicamente aprendiendo a resolver sistemas de ecuaciones lineales por algún método, sino que se construye mediante la articulación progresiva de distintas dimensiones de la comprensión, donde la activación de conocimientos previos es crucial. En este caso, la visualización geométrica actuó como el referente inicial que propició el desarrollo hacia un nivel más formal para representar, caracterizar, determinar e interpretar dicho objeto matemático.

Keywords:

Systems of linear equations

Linear Algebra

hypothetical learning trajectory

Higher Education

Engineering Education

ABSTRACT

This study aimed to identify the dimensions that promote first-year engineering students' understanding of the solution set of systems of linear equations when a Hypothetical Learning Trajectory is implemented. The theoretical framework is grounded in the Hypothetical Learning Trajectory and the design heuristic of emergent models. A design-based research study was conducted with 25 first-year university students enrolled in a Linear Algebra course. The participants completed four learning tasks on systems of linear equations. The findings show that understanding the solution set is not achieved solely by learning to solve systems of linear equations using a particular method; rather, it is progressively constructed through the articulation of different dimensions of understanding, in which the activation of prior knowledge plays a crucial role. In this study, geometric visualization served as the initial referent that fostered students' progression toward a more formal level of representing, characterizing, determining, and interpreting this mathematical object.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) constituyen un contenido central del Álgebra Lineal, porque sirven de herramienta para abordar otros conceptos fundamentales como: vectores linealmente dependientes en espacios vectoriales, bases de espacios vectoriales, transformaciones lineales, vectores y espacios propios, etc. Sin embargo, los estudiantes universitarios suelen tener dificultades en la resolución y conceptualización de su conjunto solución, especialmente en los casos con infinitas soluciones o sin soluciones (Rodríguez et al., 2019; Henriques y Márcio, 2023). Se reportan errores vinculados con malas interpretaciones de las soluciones de los SEL y errores de cálculo relacionados con los procesos de reducción de filas (Mutambara y Bansilal, 2021, XXX, (año)). Dichas dificultades tienen que ver con lo abstracto del ramo y porque generalmente se enseña de manera mecánica, también con la tendencia a la

memorización en lugar de la comprensión conceptual, problemas en la transición entre diferentes representaciones y la falta de conexión entre lo abstracto y lo aplicado (Bianchini et al., 2019).

La investigación en Matemática Educativa ha estudiado diferentes dimensiones para comprender el concepto de conjunto solución de los SEL. Varios artículos se centran en la interpretación geométrica de SEL y sus soluciones, revelando dificultades en la transición entre aspectos geométricos y algebraicos. Por ejemplo, el estudio de Oktac (2018) reveló que los estudiantes tienen dificultades para establecer conexiones entre los aspectos geométricos y algebraicos de los SEL. Los estudiantes, suelen asociar la solución de un SEL con el par ordenado obtenido al resolver dos ecuaciones simultáneamente, estas dos concepciones adquiridas en el plano bidimensional constituyen un obstáculo al pasar al espacio, llegando a interpretaciones como concebir la línea de intersección de planos como una solución única. Por su parte, Zandieh y Larson (2019), examinaron cómo los estudiantes simbolizan y resuelven SEL, revelando dificultades en la transición entre contextos algebraicos y geométricos, los estudiantes eran más flexibles en sus estrategias de solución al resolver sistemas que involucraban rectas que al resolver sistemas que involucraban planos. De manera similar, Rodríguez et al. (2022) estudiaron cómo estudiantes chilenos de secundaria y universidad comprenden el conjunto solución de un sistema lineal de tres ecuaciones y dos incógnitas, evidenciando cierta incompreensión de lo que es una solución para un sistema, dificultades para articular los aspectos geométricos con los algebraicos.

Lo anterior, refuerza la necesidad de estrategias didácticas que faciliten a los estudiantes interpretar las soluciones de un SEL desde una perspectiva conceptual, trascendiendo la mera aplicación mecánica de procedimientos. Estudios recientes han identificado la importancia de establecer conexiones explícitas entre diferentes representaciones en el aprendizaje de SEL (Henriques y Márcio, 2023; León del Carmen et al., 2024, Ávila-Aguilar et al. 2026). Zandieh y Larson (2019) sugiere que permitir a los estudiantes visualizar diferentes tipos de conjuntos de soluciones y sus representaciones simbólicas antes de aprender procedimientos como la reducción de filas puede ser útil para comprender e interpretar los resultados de dichos procedimientos. Mientras que, Tatira (2023) respalda la importancia pedagógica de iniciar el aprendizaje de SEL con representaciones visuales, como gráficas de intersección de rectas, para todos los tipos de soluciones existentes, antes de abordar métodos algebraicos como la reducción de matrices. Estos estudios enfatizan que una comprensión profunda requiere no solo habilidades procedimentales, sino también una base conceptual que conecte diferentes ideas matemáticas con su aplicación en contextos reales diversos.

De acuerdo con Gravemeijer (1999, 2007), la comprensión de un contenido matemático se construye progresivamente a partir de cuatro niveles de actividad: situacional, referencial, general y formal. En este enfoque, el aprendizaje se caracteriza por la transición desde un *modelo-de* representaciones informales hacia un *modelo-para* el razonamiento matemático formal. Este proceso permite a los estudiantes construir significado en torno a un concepto. En este sentido, la heurística de diseño de los modelos emergentes proporciona una base conceptual para comprender y diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje orientados a favorecer dicha progresión.

Por su parte, y en este mismo contexto, las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) constituyen una herramienta teórico-metodológica que permite anticipar y analizar la evolución del pensamiento de los estudiantes (Simon, 1995). Esta, consta de tres componentes interdependientes: un objetivo de aprendizaje que define la dirección del proceso, las actividades de aprendizaje cuidadosamente secuenciadas, y el proceso de aprendizaje hipotético, que constituye una predicción fundamentada de cómo evolucionará el pensamiento y la comprensión de los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas (Simon, 2020). Diversos estudios han mostrado el potencial de las THA para favorecer la comprensión de conceptos matemáticos en educación superior (Cárcamo, 2017; Castro et al. 2025; Trigueros y Possani, 2013; Zandieh y Rasmussen, 2012). Sin embargo, existe escasa evidencia respecto de las dimensiones que favorecen la comprensión del conjunto solución de los SEL a través de una THA.

Considerado lo expuesto, en este estudio nos interesa saber qué dimensiones favorecen la construcción del conjunto solución de SEL. Así, en este contexto, el objetivo de este estudio es identificar dimensiones que favorecen la comprensión del conjunto solución de SEL de estudiantes de primer año de ingeniería cuando se usa una THA.

MATERIALES Y MÉTODOS

Este estudio es del tipo cualitativo. La metodología empleada fue la Investigación Basada (IBD), la cual tiene como propósito examinar el aprendizaje en su contexto real a través de la creación y el análisis sistemático de un diseño instruccional específico. La IBD es cíclica y consta de las siguientes fases: i) Preparación y diseño ii) Experimento de enseñanza y iii) Análisis retrospectivo (Bakker, 2018). En la fase de diseño, desarrollamos una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) (Simon, 2020; Cárcamo et al. 2021) con 4 tareas de aprendizaje, fundamentadas en la heurística de diseño de los modelos emergentes

(Gravemeijer, 1999) y siguiendo el modelo para la construcción de una THA preliminar propuesto por Cárcamo y Fuentealba (2023) (ver Fig.1).



Fig. 1: Modelo para construcción de una THA. Fuente: Cárcamo y Fuentealba (2023).

El objetivo de la THA es que los estudiantes puedan “Comprender el concepto de SEL de $m \times n$ y resolver matricialmente SEL de $m \times n$ para obtener su conjunto solución expresado como subconjunto de $\mathbb{R}^n$ o $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ ”. La THA estuvo compuesta por cuatro tareas principales, las que se sintetizan en la Tabla 1.

Tabla 1: Descripción de la THA y relación con los niveles de actividad

Objetivo de la THA: Comprender el concepto de SEL de $m \times n$ y resolver matricialmente SEL de $m \times n$ para obtener su conjunto solución expresado como subconjunto de $\mathbb{R}^n$ o $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$	
Tarea	Descripción
Tarea 1	Activación de conocimientos previos y visualización geométrica de ecuaciones lineales y SEL de 2×3 .
Tarea 2	Relación entre posiciones relativas de planos, cantidad de soluciones y conjunto solución, de SEL de 3×3 .
Tarea 3	Interpretación del conjunto solución a partir de matrices aumentadas reducidas por filas.
Tarea 4	Aplicación de SEL en una situación de modelación de flujo vehicular.

En la fase de experimentación, efectuamos dos ciclos en donde aplicamos la THA en un curso de Álgebra Lineal. En este estudio, nos enfocamos en el segundo ciclo de experimento en donde participaron 25 estudiantes universitarios de primer año que cursaban Álgebra Lineal en una universidad chilena. De acuerdo con el currículum de estudio de secundaria de Chile, ellos habían estudiado SEL de 2×2 , resolviendo por el método de sustitución, reducción y gráfico. Además, habían estudiado las ecuaciones de planos y rectas en el espacio, en su curso de geometría que es un requisito para dar el curso de Álgebra Lineal. El experimento se realizó en 5 sesiones (de 60 a 90 minutos), en el aula y horario habitual de clases, recopilando protocolos escritos de los estudiantes de las tareas de aprendizaje, grabaciones de audio y anotaciones. En la fase de análisis, se transcribió las grabaciones de audio de las discusiones entre estudiantes y los protocolos escritos. Se realizó un análisis cualitativo inductivo identificando dimensiones que favorecen la comprensión y cómo se articulan. Para cada dimensión, se seleccionaron episodios representativos que evidenciaron el razonamiento de los estudiantes, triangulando datos de las transcripciones de diálogos y sus protocolos escritos.

RESULTADOS

Los resultados evidencian cinco dimensiones clave en el proceso de comprensión del conjunto solución: geométrica, conjuntista, algebraica, estructural y aplicado del conjunto solución. Estas dimensiones no emergieron de manera lineal ni exclusiva en una única tarea, sino que fueron emergiendo, articulándose y refinándose progresivamente a través de la THA. En la tabla 2, se resume los indicadores para cada dimensión y a continuación describimos y ejemplificamos estas dimensiones.

Tabla 2: Dimensiones de la comprensión del conjunto solución e indicadores de análisis.

Dimensión	¿Qué comprende el estudiante?	Indicadores de análisis
Geométrica	Comprende que los SEL con 3 incógnitas pueden interpretarse mediante representaciones geométricas(planos) y que el conjunto solución se	Representación geométrica de una, dos o tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, intersecciones de planos.

	relaciona con las intersecciones entre dichas representaciones.	
Conjuntista	Reconoce la naturaleza del conjunto solución (vacío, unitario o infinito).	Identifica conjuntos de solución única, infinitas soluciones o vacío.
Algebraica	Comprende que el conjunto solución puede representarse mediante un lenguaje algebraico utilizando parámetros y notación de conjuntos.	Parametrización, reconocimiento de variables libres, descripción simbólica.
Estructural	Comprende que la naturaleza del conjunto solución puede deducirse a partir de propiedades estructurales del SEL, ya sea, de su representación matricial o equivalente.	Interpretación de matrices reducidas, rango, SEL equivalentes, consistencia.
Aplicada	Comprende que el conjunto solución debe interpretarse considerando las condiciones y restricciones del contexto, y no únicamente como un resultado matemático.	Interpretación del conjunto solución en función del contexto y las restricciones del problema.

Dimensión geométrica del conjunto solución

La dimensión geométrica constituyó el primer referente desde el cual los estudiantes comenzaron a construir la comprensión del conjunto solución. En primer lugar, en la Tarea 1, los estudiantes activaron sus conocimientos previos sobre una ecuación lineal, cuando respondieron ¿qué representa geoméricamente la ecuación lineal dada? y ¿cuántas soluciones tiene la ecuación lineal dada? Ante esto los estudiantes respondieron que representa un plano y que la ecuación tiene infinitas soluciones, *pues el plano tiene infinitos puntos o porque se extiende al infinito*. Además, indicaron distintas tripletas que satisfacen la ecuación. Adicionalmente, observaron las posiciones relativas entre dos planos, desde donde concluyeron que pueden intersectarse en una recta o que pueden ser paralelos. En este punto, se obtuvieron descripciones como: *“Si la representación gráfica genera una intersección tendrá infinitas soluciones, porque aquellas soluciones están dadas por una recta. Si la representación gráfica es paralela no tendrá soluciones porque no genera intersección”*.

Lo anterior evidencia que la visualización geométrica actuó como un primer referente para comprender el conjunto solución, referente que continuó siendo movilizado y refinado en las tareas posteriores de la THA.

Dimensión conjuntista del conjunto solución

La visualización geométrica constituyó un referente para la construcción del significado conjuntista del conjunto solución. En la Tarea 1, la representación de SEL mediante planos favoreció que los estudiantes interpretaran la naturaleza del conjunto solución a partir de dos posiciones relativas entre planos. Así, asociaron la intersección de dos planos en una recta con la existencia de infinitas soluciones y la ausencia de intersección entre planos paralelos con la inexistencia de solución.

Luego, en la Tarea 2, este significado se amplió cuando los estudiantes visualizaron distintas posiciones relativas entre tres planos. Emerge el caso única solución, en donde los estudiantes indican que tiene solución única, pues *“los gráficos [refiriéndose a los planos] se intersectan en un punto único”*. En tanto, para los casos presentados en la fila 1 y 3 de la tabla de la Fig.2, mencionaron que no tiene solución, pues *“no se intersectan todos los gráficos”* o *“porque los gráficos no se intersectan en algún punto común”*. Estas respuestas evidencian que los estudiantes comenzaron a distinguir entre las intersecciones parciales de dos planos y la condición de intersección simultánea de los tres planos como requisito para la existencia del conjunto solución. Así, el conjunto solución se reconoce como un conjunto de puntos que puede ser unitario, infinito o vacío.

	No tiene solución	Porque los graficos no se intersectan
	Tiene una solución	Porque los graficos se intersectan en un punto único.
	No tiene solución	Porque los graficos no se intersectan en algún punto en común.

Fig. 2: Evidencia de protocolo escrito por un estudiante sobre la visualización de las intersecciones de tres planos y naturaleza del conjunto solución del SEL asociado.

Dimensión algebraica del conjunto solución

La dimensión algebraica de la comprensión del conjunto solución se evidenció cuando los estudiantes comenzaron a representar las soluciones de un SEL mediante expresiones simbólicas. Esta representación se apoyó en dimensión geométrica, es decir, en la intersección entre dos planos. Luego de visualizar, los estudiantes determinaron la ecuación paramétrica de la recta resolviendo un SEL mediante los métodos de reducción y sustitución (ver Fig.3), previamente aprendidos en la educación secundaria. Posteriormente, escriben como conjunto todos los puntos (tripletas) que pertenecen a dicha recta. Esta acción, les permitió avanzar hacia la idea de representación algebraica del conjunto solución de un SEL con infinitas soluciones.

1) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que resulta de la intersección de ambos planos dados.

$$\begin{array}{r} x+2y-z=3 \\ + \quad 2x+3y+z=1 \\ \hline 3x+5y=4 \\ x=\frac{4-5y}{3} \end{array}$$

Reemplazando x en la ec. 1:

$$\frac{4-5y}{3} + 2y - z = 3$$

$$\frac{4}{3} - \frac{5y}{3} + 2y - z = 3$$

$$\frac{4}{3} - \frac{5}{3} + 2y - z = 3$$

$$-\frac{1}{3} + 2y - z = 3$$

$$2y - z = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$z = 2y - \frac{10}{3}$$

Let: $y = t, t \in \mathbb{R}$

$$L: \begin{cases} x = \frac{4-5t}{3} \\ y = t \\ z = 2t - \frac{10}{3} \end{cases}$$

2) Escriba el conjunto de todos los puntos (tripletas) que pertenecen a la recta que resulta de la intersección de ambos planos dados.

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{4-5t}{3}, y = t, z = 2t - \frac{10}{3}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Fig. 3 Evidencia sobre como determinan la ecuación paramétrica de una recta para luego expresarla como un conjunto de puntos

Por consiguiente, cuando se introduce la resolución matricial los estudiantes ya han activado la notación de conjuntos por compresión o extensión para expresar las soluciones de un SEL.

Dimensión estructural del conjunto solución

Sobre la base de las comprensiones construidas previamente, el análisis estructural de matrices escalonadas permitió a los estudiantes determinar la naturaleza del conjunto solución sin depender de su representación geométrica. Los estudiantes comenzaron a determinar la existencia o inexistencia de soluciones a partir de propiedades estructurales del SEL, entendiendo que una solución de un SEL debe satisfacer todas las ecuaciones que lo conforman. Por ejemplo, cuando K resolvió un SEL inconsistente, al momento de obtener una matriz escalonada, observó que en la última fila tiene la estructura $(0 \ 0 \ 0 | -8)$. A continuación, él escribió el SEL equivalente, marcó con una X al lado de la tercera ecuación del SEL y escribió “contradicción $0 \neq -8$ ”. Además, argumentó “No existe una tripleta que satisfaga el SEL, lo que significa que no tiene solución.” Finalmente, concluyó “ $S = \emptyset$ ”, lo que se interpreta como un conjunto solución vacío.

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{f_3 \rightarrow f_1 + 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right) \\ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 6 \\ -5y + 10z = -7 \\ 0 = -8 \end{array} \end{array}$$

$\times$ Contradicción:
 $0 = -8$

$\therefore$ No existe una terna que satisfaga el SEL, lo que significa que no tiene solución.

$S = \emptyset$

Fig. 4 Evidencia de la comprensión estructural del SEL para obtener el conjunto solución

A su vez, la interpretación de matrices aumentadas ya reducidas, a través de SEL equivalentes, favoreció la comprensión de la naturaleza de sus soluciones. Luego de tabular, sus resultados (ver Fig.5), y considerar los resultados obtenidos en anteriores tareas de la THA, los estudiantes conjeturaron una relación entre el número de soluciones del SEL, el rango de la matriz aumentada, el rango de la matriz de coeficientes y el número de incógnitas, lo que resulta ser un acercamiento bastante preciso al teorema de Rouché-Frobenius. Como muestra lo expresado por el estudiante K: “Por medio de la tabla se puede inferir que los SEL’s que tienen una única solución tienen el mismo rango la matriz aumentada que la matriz de coeficientes y que el número de incógnitas. Por otro, si el rango de la matriz aumentada es igual al rango de la matriz de coeficientes, y estos 2 son menores que la cantidad de incógnitas, el SEL tendría infinitas soluciones. Finalmente, si el rango de la matriz aumentada es mayor que la matriz de coeficientes sin importar el número de incógnitas, el SEL no tendrá soluciones.”

Matriz aumentada del SEL	SEL equivalente analíticamente	Cantidad de soluciones	Conjunto solución del SEL	Número de incógnitas	Rango de A	Rango de (A/B)
$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right)$	$\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 15 \\ 0 = 7 \end{array}$	0 soluciones	$S = \emptyset$	3	3	4
$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$	$\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$	1 solución	$S = \{(3, 2, 0)\}$	3	3	3
$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right)$	$\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ 0 = -6 \end{array}$	1 solución	$S = \{(5, 2, 3, -6)\}$	4	4	4
$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$	$\begin{array}{l} x - 2u = 3 \\ y + u = 2 \\ z + u = -1 \end{array}$	Infinitas soluciones	$S = \{(2t+3, 2-t, -1-t, t)/\forall t\}$	4	3	3

Fig. 5: Protocolo escrito por estudiante K, sobre el análisis estructural del SEL

Comprensión del conjunto solución en un contexto aplicado

La actividad de modelación permitió observar una nueva dimensión del conjunto solución de un SEL. El cual cobra sentido según el contexto y restricciones adicionales que se deban considerar. En este nivel el conjunto solución deja de ser un objeto abstracto (o geométrico), y pasa a funcionar como una herramienta para interpretar y resolver una situación contextualizada.

Aplicando la regla fundamental de conservación del flujo, la cual establece que, *en cada nodo, el flujo entrante es igual al flujo saliente*, los estudiantes, plantearon analíticamente un SEL que describía un patrón de flujo de una red dada y lo resolvieron matricialmente. La mayoría de los estudiantes, aplicaron correctamente lo que se sabe sobre el contenido matemático, en este caso, resolver el SEL: escribieron la matriz aumentada de dicho SEL, obtiene su forma escalonada reducida por filas y a partir de la matriz escalonada plantea un SEL equivalente, de donde identifica los parámetros involucrados (variables libres). En este punto, debían adicionar restricciones del contexto del problema planteado, para interpretar las soluciones en dicho contexto. La mayoría de los estudiantes, suponen los flujos no negativos y resuelven un sistema de inecuaciones para concluir que t es mayor o igual a 80 luego concluyen *el valor más pequeño que puede tomar x_4 es 80*.

$$S = \{(20, 20+t, t-80, t) \mid t \in \mathbb{N}_0 \geq 80\}$$

$$20+t \geq 0$$

$$20+t \geq 0 \rightarrow 20 \geq -t$$

$$t-80 \geq 0 \rightarrow t \geq 80$$

$$t \geq 0$$

El valor más pequeño que puede tener x_4 es 80

Fig. 6 Protocolo escrito por un estudiante sobre el conjunto solución de SEL como herramienta para interpretar y resolver una situación contextualizada.

DISCUSIÓN

El objetivo de este estudio fue identificar dimensiones que favorecen la comprensión del conjunto solución de SEL en estudiantes de primer año de ingeniería cuando se usa una THA. Los resultados evidencian que la comprensión del conjunto solución se favoreció mediante la articulación progresiva de distintas dimensiones: geométrica, conjuntista, algebraica, estructural y aplicada. Estas dimensiones no se desarrollaron de manera lineal, sino que se fueron movilizand, articulando y refinando a través de las tareas de la THA. En particular, la visualización geométrica permitió a los estudiantes reconocer que un SEL puede tener una solución, infinitas soluciones o ninguna, y avanzar posteriormente hacia la representación de estos resultados mediante la notación formal de conjuntos, es decir, avanzar hacia formas algebraicas y estructurales de razonamiento.

Un resultado relevante fue la articulación entre la comprensión geométrica y conjuntista del conjunto solución. La visualización de las intersecciones de dos planos y la acción de escribir como conjunto todos los puntos que pertenecen a la recta que resulta de la intersección de dos planos (ver Fig.3) permitió relacionar la representación geométrica de la recta con su interpretación como un conjunto de infinitos puntos que satisfacen simultáneamente las ecuaciones del sistema. Este resultado resulta relevante al considerar la dificultad reportada por Oktac (2018), quien señaló que algunos estudiantes interpretan la recta como una única solución, debido a que intentan generalizar concepciones preconcebidas asociadas a la interpretación geométrica de SEL de 2×2 . En contraste, en nuestro estudio, la articulación entre la visualización geométrica y la representación conjuntista proporcionó un medio para comprender la recta no como una solución particular, sino como la representación del conjunto solución de un SEL con infinitas soluciones. Este resultado sugiere que la visualización geométrica puede contribuir a construir el significado de conjunto solución como concepto matemático.

Nuestros resultados son consistentes con investigaciones que destacan la importancia de establecer conexiones explícitas entre diferentes representaciones en el aprendizaje de los SEL (Henriques y Márcio, 2023; León del Carmen et al., 2024; Zandieh y Larson, 2019), respaldan la propuesta de Tatira (2023) sobre la importancia de iniciar el aprendizaje de los SEL mediante representaciones visuales que permitan abordar los distintos tipos de solución. Además, aportan evidencia sobre cómo estas representaciones pueden articularse progresivamente con comprensiones conjuntistas, algebraicas y estructurales del conjunto solución.

La articulación entre estas dimensiones también se observó en el trabajo con matrices. El trabajo previo con las representaciones geométrica y conjuntista permitió que los estudiantes interpretaran las matrices escalonadas reducidas no solo como el resultado de un procedimiento, sino también como una forma de analizar el conjunto solución. En particular, cuando los estudiantes relacionaron el tipo de solución con los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz aumentada, llegaron a formular una conjetura cercana al teorema de Rouché-Frobenius. Esto sugiere que el trabajo previo sobre el conjunto solución favoreció las interpretaciones matriciales, al relacionarlos con la naturaleza del conjunto solución de un SEL desde una comprensión estructural del conjunto solución.

Desde la perspectiva de los modelos emergentes, la THA proporcionó oportunidades para que los estudiantes transitaran por los niveles de actividad situacional, referencial, general y formal, facilitando que los estudiantes transitaran desde representaciones geométricas hacia razonamientos formales, desarrollando gradualmente modelos matemáticos cada vez más sofisticados y generales (Gravemeijer, 2020). En este proceso, las representaciones geométricas inicialmente vinculadas a las situaciones propuestas pudieron

transformarse progresivamente en herramientas para razonar sobre el conjunto solución. Así, la progresión entre niveles no implica la sustitución de una representación por otra, sino una reorganización y ampliación de los significados construidos en torno al mismo objeto matemático.

Implicaciones didácticas

Estos resultados sugieren que la enseñanza-aprendizaje del conjunto solución de un SEL puede enriquecerse cuando se promueve la articulación de múltiples formas de comprensión, evitando reducir este objeto matemático a la aplicación de procedimientos de resolución. En particular, la visualización geométrica puede constituir un referente inicial, cuando se tenga como conocimientos previos y se active para, que favorezca la construcción progresiva de comprensiones conjuntistas, algebraicas y estructurales. De acuerdo con Simon (2014), las oportunidades de aprendizaje que se ofrecen a los estudiantes influyen en la construcción de sus conocimientos. En este sentido, una THA que articule representaciones gráficas, conjuntistas, algebraicas, matriciales y contextuales puede ampliar las oportunidades para construir una comprensión más significativa del conjunto solución. En particular, los resultados sugieren que la incorporación temprana de la visualización geométrica, junto con actividades que promuevan conexiones explícitas entre representaciones, puede favorecer que los procedimientos algebraicos y matriciales sean comprendidos en relación con el objeto matemático que permiten representar y determinar.

Limitaciones del estudio y posibles direcciones para futuras investigaciones

Este estudio se centró en el análisis de una THA implementada con un grupo específico y reducido de estudiantes universitarios. Futuras investigaciones podrían analizar cómo estas dimensiones evolucionan en otros contextos educativos y profundizar en la relación entre ellas y las subcompetencias de modelización matemática movilizadas durante la actividad de aplicación

CONCLUSIÓN

Este estudio nos permitió identificar dimensiones que favorecen la comprensión del conjunto solución de SEL, por parte de estudiantes de primer año de ingeniería, cuando se usa una THA. Los resultados indican que la comprensión del conjunto solución no se desarrolla únicamente aprendiendo a resolver SEL por algún método, sino que se construye mediante la articulación progresiva de distintas dimensiones o representaciones del conjunto solución, donde la activación de conocimientos previos es crucial. Ninguna dimensión, por sí sola, indica la comprensión del conjunto solución; es su articulación durante el desarrollo de la THA la que favorece una comprensión más profunda de este objeto matemático. En este caso, la visualización geométrica actuó como el referente inicial que propició el desarrollo hacia un nivel más formal (a través de la ecuación paramétrica de una recta), para representar, caracterizar, determinar e interpretar el conjunto solución de un SEL.

REFERENCIAS

- Avila-Aguilar, Z., Muñoz Aguirre, E., Tapia Santos, B., Landa Espejo, A. M., & Velasquez Ovando, K. M. (2026). Modos de pensamiento en estudiantes de ingeniería al resolver sistemas de ecuaciones lineales 3×3 . *Revista Latinoamericana de Calidad Educativa*, 3(2), 18–27. <https://doi.org/10.70625/rlce/586>
- Bakker, A. (2018). *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers* (1ª ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203701010>
- Bianchini, B. L., De Lima, G. L., & Gomes, E. (2019). Linear algebra in engineering: An analysis of Latin American studies. *ZDM*, 51(7), 1097–1110. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01081-5>
- Cárcamo, A., & Fuentealba, C. (2023). Un modelo para la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje preliminares. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 37(76), 577–601. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10>
- Cárcamo Bahamonde, A. (2017). *Una Innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado*. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Castro, T., Cárcamo, A., & Fortuny, J. M. (2026). A hypothetical learning trajectory for the construction of trigonometric equations with infinite solutions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 57(5), 850–869. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2025.2487937>
- Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155–177. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4
- Gravemeijer, K. (2020). *Emergent Modeling_ an RME Design Heuristic Elaborated in a Series of Examples*.

- Henriques, A., & Márcio, M. (2022). Mathematical reasoning in linear systems learning: A higher education exploratory teaching experiment with prospective teachers. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (21), 65–85. <https://doi.org/10.35763/aiem21.4238>
- León Del Carmen, A., León Del Carmen, W., García-García, J., & Salgado-Beltrán, G. (2024). Mathematical connections made by preservice mathematics teachers when solving tasks about systems of linear equations. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(4), em0799. <https://doi.org/10.29333/iejme/15590>
- Mutambara, L. H. N., & Bansilal, S. (2022). A case study of in-service teachers' errors and misconceptions in linear combinations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(11), 2900–2918. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1913656>
- Oktaç, A. (2018). Conceptions About System of Linear Equations and Solution. En S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 71–101). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_4
- Rodríguez Jara, M. A., Mena Lorca, A., Mena Lorca, J., Vásquez Saldías, P., & Del Valle Leo, M. E. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 37(1), 71–92. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194>
- Rodríguez, M., Mena-Lorca, A., Gregori, P., Vásquez, P., Del Valle, M., & Parraguez, M. (2022). Comprensión del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas: Un estudio de casos. *Educación Matemática*, 34(3), 163–193. <https://doi.org/10.24844/EM3403.06>
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114. <https://doi.org/10.2307/749205>
- Simon, M. (2020). Hypothetical learning trajectories in mathematics education. En S. Lerman, (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 354-357). Springer.
- Tatira, B. (2023). Undergraduate students' conceptualization of elementary row operations in solving systems of linear equations. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(11), em2349. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13679>
- Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 438(4), 1779–1792. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.009>
- Zandieh, M., & Andrews-Larson, C. (2019). Symbolizing while solving linear systems. *ZDM*, 51(7), 1183–1197. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01083-3>
- Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(2), 57–75. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.01.001>