Modos de pensamiento en estudiantes de ingeniería al resolver sistemas de ecuaciones lineales 3x3

Thinking modes in engineering students when solving 3×3 systems of linear equations

Zenaida Ávila-Aguilar[1], Evodio Muñoz-Aguirre[2], Brenda Tapia-Santos[3], América María Landa-Espejo[4] y Karla María Velasquez-Ovando[5]

[1]Universidad Veracruzana, zavila@uv.mx, https://orcid.org/0009-0003-8905-4549, México
[2]Universidad Veracruzana, evmunoz@uv.mx, https://orcid.org/0000-0002-7887-5734, México
[3]Universidad Veracruzana, btapia@uv.mx, https://orcid.org/0000-0002-2284-2386, México
[4]Universidad Veracruzana, zS19023656@estudiantes.uv.mx, https://orcid.org/0009-0007-8189-3603, México
[5]Universidad Veracruzana, karlita3005@outlook.com, https://orcid.org/0009-0008-3336-5571, México

Información del Artículo

Trazabilidad:

Recibido 12-02-2026
Revisado 16-02-2026
Aceptado 01-04-2026

Palabras Clave:

Álgebra lineal
Modos de pensamiento
Sistemas de ecuaciones lineales 3×3

RESUMEN

Este estudio examina cómo los estudiantes de Ingeniería comprenden el conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales 3×3, a partir del marco teórico de los modos de pensamiento de Sierpinska. Aunque existe amplia investigación sobre dificultades en Álgebra Lineal, son escasos los trabajos que analizan este concepto en sistemas tridimensionales, donde convergen dimensiones geométricas, algebraicas y estructurales. Se adoptó un enfoque cualitativo en donde participaron 20 estudiantes que habían cursado Álgebra Lineal, seleccionados de manera intencional. Se aplicó un cuestionario de cuatro tareas abiertas adaptado de un instrumento previo, modificado del contexto bidimensional al tridimensional (R^2 a R^3). El análisis se realizó mediante categorías a priori basadas en los modos sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, complementadas con una interpretación en profundidad de las producciones escritas. Los resultados evidencian un predominio de estrategias procedimentales, con dificultades para articular representaciones geométricas y razonamientos estructurales. Asimismo, la coordinación entre modos de pensamiento aparece de forma limitada. Se concluye la necesidad de diseñar propuestas didácticas que favorezcan la integración entre visualización, procedimientos y propiedades en la enseñanza del Álgebra Lineal.

Keywords:

Linear algebra
Modes thought
Systems of linear equations 3×3

ABSTRACT

This study examines how engineering students understand the solution set of 3×3 systems of linear equations, based on Sierpinska's theoretical framework of modes of thinking. Although extensive research exists on difficulties in linear algebra, few studies analyze this concept in three-dimensional systems, where geometric, algebraic, and structural dimensions converge. A qualitative approach was adopted, involving 20 students who had taken Linear Algebra, selected intentionally. A questionnaire with four open-ended tasks, adapted from a previous instrument and modified from a two-dimensional to a three-dimensional context (R^2 to R^3), was administered. The analysis was conducted using a priori categories based on synthetic-geometric, analytic-arithmetic, and analytic-structural modes of thinking, complemented by an in-depth interpretation of the written work. The results show a predominance of procedural strategies, with difficulties in articulating geometric representations and structural reasoning. Furthermore, the coordination between modes of thought appears to be limited. It is concluded that there is a need to design didactic proposals that promote the integration of visualization, procedures, and properties in the teaching of Linear Algebra.

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones en educación matemática han documentado los obstáculos persistentes en la comprensión de conceptos particulares del Álgebra Lineal (por ejemplo, Arnawa et al., 2019; Harel, 1989; Hillel & Sierpinska, 1993; Oktaç, 2018; Trigueros & Wawro, 2020; Zandieh et al., 2017). En este campo, se han desarrollado distintas líneas de investigación que buscan explicar dichas dificultades: por un lado, algunas enfatizan la importancia de las conversiones entre distintos registros de representación, mientras que otras destacan el papel de los niveles de descripción, los puntos de vista y los modos de razonamiento involucrados en la construcción del conocimiento matemático (Aredo & Ugarte, 2019).
En el marco de los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000), distintas investigaciones han mostrado que las dificultades en el Álgebra Lineal no se reducen a errores de cálculo, sino a la escasa articulación entre los modos de pensamiento sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico-estructural. Diversas investigaciones señalan que los estudiantes suelen mantenerse dentro de un mismo modo de pensamiento (Parraguez et al., 2023), particularmente suelen centrarse en relaciones numéricas y algebraicas, incluso en situaciones que demandan otros tipos de razonamiento (Şimşek & Turanlı, 2024; Parraguez & Bozt, 2012) y sin conexión con otros modos (Kinley, 2016). De manera complementaria, Harel (1989) advierte que muchos estudiantes realizan operaciones o cálculos sin lograr una comprensión conceptual del objeto matemático en juego.
Estudios como los de Sierpinska (2000), Randolph y Parraguez (2019) y Cárcamo et al. (2021) muestran que las dificultades en el aprendizaje del Álgebra Lineal surgen, en gran medida, de la falta de articulación entre distintos modos de pensamiento. En este sentido, Rodríguez et al. (2019) concluyen que existen dificultades para articular los aspectos geométricos con los algebraicos. Específicamente en torno a la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales, estas desconexiones generan obstáculos para interpretar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones, visualizar la intersección de planos en R^3 y comprender el significado matemático del conjunto solución.
Si bien la literatura aborda los modos de pensamiento en diversos conceptos matemáticos, son escasas las investigaciones que los examinan específicamente en el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales 3×3. Una parte importante de los estudios se ha centrado en sistemas con dos incógnitas o en poblaciones de cursos iniciales, mientras que existe menor evidencia sobre cómo se comprende el conjunto solución en sistemas tridimensionales, particularmente en estudiantes de Ingeniería, donde la dimensión espacial y la interpretación estructural adquieren especial relevancia. En esta línea, investigaciones como la de Zandieh & Andrews-Larson (2019) muestran que los estudiantes presentan mayor flexibilidad en sus estrategias al trabajar con sistemas que involucran líneas que con aquellos que implican planos, lo que sugiere que el paso al contexto tridimensional introduce desafíos adicionales en la comprensión. Asimismo, aunque se reconoce la importancia de articular los modos de pensamiento, aún se requiere evidencia empírica que describa cómo se manifiestan y coordinan dichos modos en tareas concretas diseñadas para provocarlos simultáneamente.

En este sentido, el presente estudio aporta al campo al:

1. focalizar el análisis en sistemas 3×3 como escenario didáctico que exige la coordinación entre registros algebraicos, geométricos y estructurales;
2. examinar específicamente a estudiantes de Ingeniería, cuya formación profesional demanda dicha articulación; y
3. emplear un instrumento diseñado con análisis a priori para identificar no solo el modo predominante, sino las transiciones o su ausencia entre modos.

A partir de lo anterior, la investigación se orienta por la siguiente pregunta:

¿Qué modos de pensamiento utilizan los estudiantes de nivel superior para comprender el conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales 3x3?
Y nuestro objetivo es:
Distinguir cómo se configuran y articulan los modos de pensamiento en la comprensión del conjunto solución de sistemas 3×3 en estudiantes de Ingeniería, a fin de generar orientaciones didácticas para su enseñanza.

Los modos de pensamiento en la comprensión del conjunto solución de sistemas 3x3

Cuando hablamos de modos de pensamiento nos referimos a los diferentes significados que adquieren los objetos matemáticos al ser trabajados en diversos modos. Según Sierpinska (2000) los modos de pensamiento no constituyen etapas en el desarrollo del pensamiento algebraico, sino que son vistos como modos igualmente útiles, cada uno en su contexto, la interacción entre los tres modos proporciona una

mayor comprensión de los objetos. Para ello, define 3 modos de pensamiento: el sintético-geométrico (SG), el analítico- aritmético (AA) y el analítico-estructural (AE).
En el modo sintético-geométrico (SG) los objetos están representados mediante la construcción geométrica como una figura, un punto, un plano, entre otros. Los objetos se dan directamente en la mente y se visualizan mediante la definición de elementos. Zimmermann & Cunningham (1991) definen a la visualización matemática como una capacidad que involucra crear, interpretar, utilizar y reflexionar sobre representaciones como imágenes, esquemas o diagramas ya sea mentalmente, en papel o mediante herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información de manera gráfica. Desde esta perspectiva, resolver un sistema 3x3 implica analizar cómo se intersecan estos tres planos: en un punto (una solución única), en una recta (infinitas soluciones), en un plano (infinitas soluciones), o no intersecarse en absoluto (ninguna solución). Esta representación permite que los estudiantes construyan una idea espacial clara del conjunto solución. Por ejemplo, si dos planos son coincidentes y el tercero es secante, se obtiene una recta como conjunto solución. La representación gráfica en 3D, incluso mediante software o maquetas físicas adquieren especial relevancia, ya que, existen diferencias notables en la naturaleza de los esquemas mentales que los estudiantes construyen en presencia y en ausencia de estas modalidades de visualización, lo que impacta directamente en su comprensión de las relaciones geométricas involucradas (Dogan, 2018). En este sentido, es fundamental plantear actividades a los estudiantes que les permitan visualizar geométricamente una ecuación lineal con dos y tres incógnitas (Ochoviet, 2010).
En el modo analítico-aritmético (AA) los objetos están representados a través de relaciones, operaciones, funciones y procedimientos con números y variables. El pensamiento es teórico desde que el alumno interpreta los objetos a través de relaciones numéricas o simbólicas. Este enfoque enfatiza el cálculo preciso y ordenado, y es el más comúnmente enseñado en los primeros niveles educativos. Para el sistema 3x3, se apoya en métodos como la sustitución o eliminación, y permite llegar a la solución sin necesariamente comprender la forma del conjunto solución. Por ejemplo, resolver el sistema:

$$
\begin{gathered}
3x + 2y + z = 1 \\
5x + 3y + 4z = 2 \\
x + y - z = 1
\end{gathered}
$$

conlleva una serie de operaciones que, si bien pueden resultar mecánicas, son fundamentales para desarrollar fluidez algebraica. Este modo resulta útil cuando la prioridad es la eficiencia del cálculo, aunque corre el riesgo de limitar la comprensión estructural si se enseña de forma aislada (Duval, 2006).
En el modo analítico-estructural (AE) los objetos son representados como un todo a través de las propiedades que poseen o axiomas que los caracterizan y permiten explicarlos. Por ejemplo, cuando la solución del sistema de ecuaciones se enfoca desde las propiedades de las matrices invertibles o no invertibles o del determinante del sistema (Sierpinska, 2000). Otro ejemplo, cuando se analizan propiedades como la linealidad, el rango de la matriz de coeficientes, la dependencia o independencia entre ecuaciones, y se aplican herramientas como determinantes o el Teorema de Rouché–Capelli. Desde este enfoque, se puede decir que un sistema es compatible determinado si el rango de la matriz coincide con el número de incógnitas, o que es incompatible si las ecuaciones se contradicen estructuralmente. Este modo favorece la generalización y la argumentación formal, especialmente en niveles avanzados.
Para Sierpinska (2000), la principal diferencia entre los modos de pensamiento sintético y analítico con respecto a los objetos matemáticos es que, en el modo sintético, los objetos matemáticos, de alguna manera, se dan directamente a la mente la que trata de describirlos, de manera natural, mientras que, en el modo analítico, estos objetos solo se construyen con las definiciones de sus elementos. La literatura reciente confirma que los estudiantes transitan de manera parcial entre estos modos y que tienden a permanecer en enfoques operativos, especialmente en sistemas de mayor dimensión como los 3x3 (Parraguez & Bozt, 2012; Reyna, 2021; Rozas-Torres et al., 2024).
Cada uno de estos modos no solo ofrece rutas distintas de resolución, sino que también incide en los significados que los estudiantes atribuyen a las soluciones. Mientras el modo geométrico favorece la intuición visual, el aritmético desarrolla habilidades de procedimiento, y el estructural fortalece la comprensión formal de los sistemas. Promover la articulación entre estos modos en el contexto de Ingeniería, resulta especialmente relevante, pues la resolución de problemas reales requiere movilizar simultáneamente visualizaciones espaciales, cálculos precisos y argumentación estructural. Estudiar cómo el estudiante activa estos modos al resolver sistemas 3x3 permite identificar dificultades persistentes y proporciona una base sólida para mejorar la enseñanza del Álgebra Lineal en niveles universitarios.

MATERIALES Y MÉTODOS

Este estudio se desarrolló bajo un enfoque cualitativo con un diseño descriptivo-interpretativo, orientado a comprender en profundidad cómo estudiantes de Ingeniería movilizan distintos modos de pensamiento (Sierpinska, 2000) al resolver sistemas de ecuaciones lineales 3×3. Dado su carácter exploratorio, es de interés el análisis detallado de las producciones escritas y la identificación de patrones de razonamiento.

Participantes
La muestra estuvo conformada por 20 estudiantes de programas de Ingeniería de la Universidad Veracruzana. La selección fue intencional, considerando que todos los participantes habían cursado y aprobado previamente Álgebra y Álgebra Lineal. En dichos cursos abordaron la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3 mediante métodos algebraicos (Gauss, Gauss-Jordan y Cramer), así como la interpretación geométrica en R^3, nociones de dependencia lineal y rango de matrices.
La aplicación del instrumento se realizó un semestre después de haber concluido Álgebra Lineal, con el propósito de explorar comprensiones relativamente consolidadas y no aprendizajes inmediatos.
El cuestionario se aplicó en una sesión académica de dos horas, bajo condiciones controladas, lo que permitió registrar procedimientos, representaciones gráficas y justificaciones escritas para su posterior análisis interpretativo.

Instrumento
El instrumento consistió en un cuestionario de cuatro preguntas abiertas, adaptado del utilizado por Rodríguez et al. (2022) originalmente diseñado para el estudio del conjunto solución en sistemas 3×2 en el nivel medio superior.
La adaptación realizada en este estudio consistió en trasladar las tareas del contexto bidimensional (R^2) al tridimensional (R^3), reformulando las situaciones para trabajar con sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. No se modificó la estructura del cuestionario ni se añadieron nuevos incisos; se mantuvo la intención original de cada pregunta y su orientación hacia la activación de distintos modos de pensamiento. El cambio de R^2a R^3implicó sustituir configuraciones de rectas por configuraciones de planos y ampliar el análisis de intersecciones al espacio tridimensional. Este desplazamiento supone una mayor demanda de visualización espacial y una complejidad estructural más amplia en la interpretación del conjunto solución, puesto que el estudio se realiza para el nivel superior, conservando la lógica conceptual del instrumento original.

Cada pregunta se diseñó para activar distintos modos de pensamiento matemático:

Pregunta 1: Parte de una representación gráfica de tres planos en R^3 y busca que el estudiante identifique cuántas soluciones tiene el sistema representado, construya un sistema de ecuaciones a partir de la figura, y explore diferentes configuraciones geométricas posibles de intersección entre planos.
Pregunta 2: Presenta un sistema homogéneo con parámetros simbólicos; a través de ella se analiza la comprensión estructural del estudiante sobre los efectos de los coeficientes en la solución del sistema; permite observar razonamientos estructurales y transiciones entre AA y AE.
Pregunta 3: Propone un sistema no homogéneo con parámetros variables; enfocado en análisis algebraico y compatibilidad del sistema.
Pregunta 4: Solicita la resolución completa de un sistema 3×3 con el método elegido por el estudiante; permite identificar el dominio de técnicas algebraicas (como el método de Gauss o sustitución) y, además, observar si el estudiante logra establecer conexiones entre los procedimientos utilizados y las características del conjunto solución obtenido.
El uso de preguntas abiertas permitió documentar procedimientos, representaciones gráficas y argumentaciones, lo que favoreció un análisis cualitativo en profundidad.

Procedimiento de Análisis
El análisis de datos se llevó a cabo mediante codificación temática, cada respuesta fue examinada en función de los elementos visuales, algebraicos o estructurales utilizados, vinculados a los modos SG, AA y AE.
Previo a la aplicación se elaboró un análisis a priori de cada pregunta, con el objetivo de anticipar estrategias esperadas y los modos de pensamiento asociados. Este análisis facilitó la posterior categorización e interpretación de las producciones estudiantiles. La Tabla 1 resume este análisis a priori.

Tabla 1: Análisis a priori de las preguntas

Pregunta	Respuesta esperada	Modo de pensamiento
Pregunta 1		
a) ¿Cuántas soluciones tiene el conjunto solución de ese SEL? Explique y/o argumente.	Supone que una solución es todo punto en común a los 3 planos del SEL 3X3.	SG
b) Mostrando el procedimiento que utilizará, escriba un SEL para la figura inicial.	Escribe las ecuaciones que representan la figura del SEL.	AA
c) Se sabe que hay otras 5 posibilidades de representar un SEL con 3 planos. Dibuje las 5 posibilidades que faltan.	Dibuja 2 planos paralelos y un plano que los corta, 2 planos coincidentes o que se corten en una recta y 3 planos que coinciden en un punto.	SG
d) De esas 5 posibilidades que mostró, asígneles un rótulo e indique, en cada caso, el número de soluciones que tendría el respectivo conjunto solución del SEL.	Interpreta e identifica los planos respectivos a cada posibilidad de solución única, infinitas soluciones o ninguna.	SG
Pregunta 2		
a) Indique el número de soluciones que tendría el respectivo conjunto solución del SEL en función de los coeficientes c, d, e y f. Identifique la posición de las soluciones en el espacio tridimensional.	Asigna valores a los parámetros para que las pendientes incluyan planos coincidentes o bien aplica el método de Gauss-Jordan. Dibuje en el espacio tridimensional las soluciones del conjunto.	SG AA
b) Generalice lo anterior para un SELH nx3	Supone que si los coeficientes son todos proporcionales hay infinitas soluciones.	AE
Pregunta 3		
Analice el número de soluciones que tendría el respectivo conjunto solución del SEL en función de los parámetros d, e, f y p.	Asigna valores a los parámetros, considerando la posición relativa de los planos o bien aplica el método de Gauss-Jordan.	AA
Pregunta 4 Resuelva el SEL mostrando el procedimiento.	Resuelve el SEL utilizando procedimientos para el SEL 3x3 o bien utiliza el método de Gauss Jordan.	AA

RESULTADOS

La organización de los resultados se realizó a partir de los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000) y del análisis a priori del instrumento. Cada inciso del cuestionario fue asociado con un modo de pensamiento predominante. La Tabla 2 presenta la correspondencia entre incisos y frecuencias de respuestas correctas.

Tabla 2: Frecuencia de respuestas correctas de cada inciso por Modo de pensamiento

Modo de pensamiento	Análisis del modo de pensamiento	Frecuencia correcto
Sintético Geométrico (SG)	1a) Aplica de manera efectiva el modo de pensamiento sintético geométrico ya que analiza la imagen y reconoce que no existe un punto en común a los 3 planos por lo que concluye que no hay solución.	8
	1c) Representa gráficamente las 5 posibilidades restantes de visualizar un sistema de ecuaciones 3x3.	10
	1d) Asigna a cada representación su respectiva solución.	6
	2a) Dibuja en el espacio tridimensional la solución del sistema lineal dado.	3
	1b) Escribe aritméticamente un sistema lineal para los planos representados en la figura.	0

Analítico Aritmético (AA)	2a) Asigna valores a los parámetros para que las ecuaciones sean coincidentes.	3
	3) Asigna valores a los parámetros para que las ecuaciones sean coincidentes.	5
	4) Resuelve el sistema de ecuaciones con el método conveniente.	13
Analítico Estructural (AE)	2b) Supone que si los coeficientes son todos proporcionales existen infinitas soluciones explicando y argumentado su respuesta.	2

Activación del modo sintético-geométrico (SG)

Pregunta 1a. Solo 8 estudiantes activaron correctamente el modo SG al concluir que el sistema no tiene solución, pues los planos no se intersecan en un punto común. El resto presentó errores derivados de la interpretación visual: algunos identificaron puntos de intersección inexistentes o confundieron la intersección entre pares de planos con la solución del sistema (véase Fig. 1).

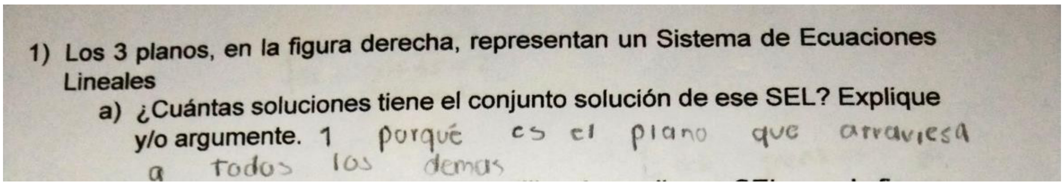


Fig. 1: Ejemplo de respuesta incorrecta de la pregunta 1ª

Pregunta 1c. 10 estudiantes representaron adecuadamente las cinco configuraciones geométricas posibles de un SEL 3×3, mostrando comprensión de las posiciones relativas de los planos. En otros casos, los estudiantes señalaron dificultades para visualizar el espacio tridimensional, atribuyéndolas a una enseñanza tradicional centrada en procedimientos algebraicos más que en la representación gráfica.

Pregunta 1d. Solo 6 estudiantes clasificaron correctamente cada una de las configuraciones geométricas, identificando la cantidad de soluciones asociada. El resto mostró errores conceptuales frecuentes, como confundir una intersección en recta con inexistencia de solución (véase Fig. 2) o interpretar dos intersecciones puntuales distintas como “dos soluciones”.

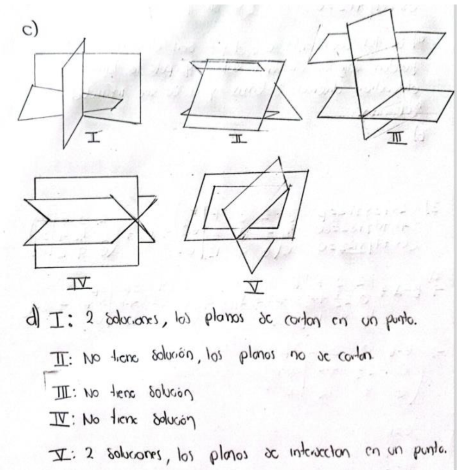


Fig. 2: Ejemplo de respuesta incorrecta en pregunta 1d

Pregunta 2a (parte geométrica). Únicamente 3 estudiantes lograron identificar geométricamente la posición de las soluciones en el espacio a partir de la estructura del sistema, combinando adecuadamente SG con AA.

En general, los incisos asociados a este modo muestran un desempeño heterogéneo. Mientras 8 y 10 estudiantes lograron interpretar adecuadamente configuraciones geométricas básicas (1a y 1c), solo 3 pudieron representar espacialmente la solución en R^3 (2a). Esto sugiere que la visualización inicial no siempre se traduce en una representación tridimensional consistente.

Activación del modo analítico-aritmético (AA)
Pregunta 1b. Todas las respuestas fueron incorrectas. Gran parte de los estudiantes no lograron expresar algebraicamente la figura dada; el único que respondió, asumió equivocadamente que existían planos coincidentes sin justificación.
Pregunta 2a (parte algebraica). Gran parte de los estudiantes identificaron correctamente el número de soluciones según la dependencia entre ecuaciones; sin embargo, omitieron representar o justificar geométricamente sus resultados, mostrando un uso parcial del modo AA (véase Fig. 3).

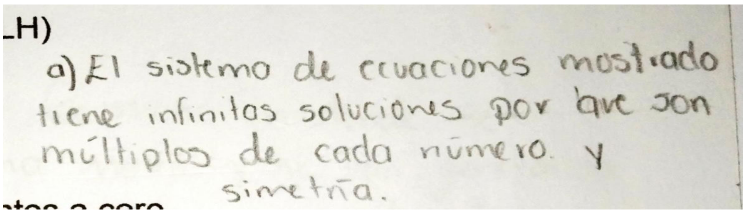
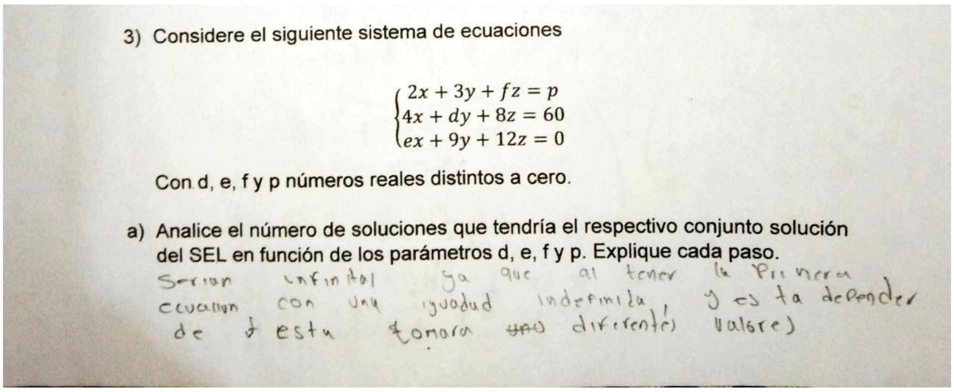

H)
a) El sistema de ecuaciones mostrado tiene infinitas soluciones por que son múltiplos de cada número. y simetría.

Fig. 3: Ejemplo de análisis incompleto de la pregunta 2a

Pregunta 3. Solo 5 estudiantes asignaron valores adecuados a los parámetros para generar sistemas con infinitas soluciones, identificando correctamente la dependencia lineal. En otros casos, aunque el razonamiento era parcialmente estructural, faltaban justificaciones o se asumía erróneamente que la solución dependía únicamente de una ecuación (véase Fig. 4).


3) Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y + fz = p \\ 4x + dy + 8z = 60 \\ ex + 9y + 12z = 0 \end{cases}$$

Con d, e, f y p números reales distintos a cero.

a) Analice el número de soluciones que tendría el respectivo conjunto solución del SEL en función de los parámetros d, e, f y p. Explique cada paso.

Serian infinitos ya que al tener la primera ecuacion con una igualdad indefinida, y esta depender de f esta tomara ~~uno~~ diferentes valores

Fig. 4: Ejemplo de respuesta incorrecta de la pregunta 3ª

Pregunta 4. 13 estudiantes resolvieron correctamente el sistema utilizando métodos algebraicos como Gauss-Jordan o Cramer. Las producciones muestran dominio procedimental en la manipulación de sistemas 3×3.
En general, el desempeño fue desigual según el tipo de demanda. Ningún estudiante logró construir algebraicamente el sistema a partir de la representación (1b), mientras que 13 resolvieron correctamente un sistema mediante procedimientos algorítmicos (4). Este contraste evidencia una fuerte tendencia hacia la ejecución técnica, pero dificultades en la modelación algebraica.

Activación del modo analítico-estructural (AE)
Pregunta 2b. Solo 2 estudiantes formularon argumentos basados en proporcionalidad de coeficientes para justificar la existencia de infinitas soluciones. Las respuestas correctas incluyeron justificaciones basadas en dependencia lineal o propiedades de matrices. La escasa presencia de este tipo de razonamiento confirma la débil movilización del modo estructural.

DISCUSIÓN

Al analizar sus producciones escritas de los estudiantes y situarlas dentro del marco teórico de los modos de pensamiento (Sierpinska, 2000), se evidenciaron rutas diversas de razonamiento y, al mismo tiempo, patrones recurrentes de dificultad que coinciden con los reportados en la literatura especializada.
En términos generales, se identificaron manifestaciones claras de los tres modos de pensamiento. Las tareas que pedían representar, reconocer o anticipar la intersección de planos en R^3 activaron con frecuencia el modo sintético-geométrico, los estudiantes que se apoyaron en esquemas visuales tendieron a captar mejor

el significado del conjunto solución como entidad geométrica (punto, recta, plano o vacío) y a relacionarlo con las condiciones de compatibilidad del sistema. Este hallazgo es consistente con trabajos como el de Ochoviet Filgueiras (2010), quien señala que la visualización geométrica es un recurso privilegiado para comprender sistemas lineales, aun cuando los estudiantes presentan dificultades persistentes al interpretar gráficamente los objetos matemáticos. En nuestro estudio, estas dificultades se expresaron mediante dibujos imprecisos, confusiones entre paralelismo y coincidencia de planos, o la incapacidad de articular la visualización con una justificación algebraica. En este sentido, los resultados refuerzan la necesidad de incorporar de manera sistemática enfoques visuales en la enseñanza, no como un recurso accesorio, sino como un componente central del aprendizaje matemático (Zimmermann & Cunningham, 1991).
Las consignas que requerían procedimientos de cálculo activaron predominantemente el modo analítico-aritmético, pues este modo de pensamiento es el comúnmente utilizado por los estudiantes (Şimşek & Turanlı, 2024; Parraguez González & Bozt Ortiz, 2012; Reyna Segura, 2021; Rozas-Torres et al., 2024). Si bien gran parte de los estudiantes resolvieron con éxito los sistemas, en muchos casos el cálculo se ejecutó sin interpretación del significado del conjunto solución. Esto puede estar estrechamente vinculado con la falta de comprensión de nociones fundamentales como variable, función y conjunto, o relacionados con interpretaciones erróneas de las soluciones de sistemas de ecuaciones (Mutambara & Bansilal, 2022; Trigueros, 2018). Este hallazgo coincide con lo que reportan Harel (1989) y Reyna Segura (2021): los estudiantes tienden a percibir los sistemas lineales como una secuencia de operaciones a ejecutar, más que como representaciones de relaciones. En esta misma línea, Harel (2017) señala que el razonamiento sobre sistemas de ecuaciones implica complejidades conceptuales importantes, que no siempre son comprendidas por quienes resuelven de forma mecánica. Nuestros resultados refuerzan esta conclusión: varios participantes llegaron a la solución correcta sin comprender la estructura algebraica que la sustenta o el tipo de conjunto que representa. Esto debido a que los estudiantes suelen usar conceptos y reglas de forma mecánica sin ser comprendidas o internalizadas (Birinci et al., 2014).
El modo analítico-estructural, asociado al uso de propiedades como la dependencia lineal emergió de forma limitada, encontramos que los estudiantes reconocen ocasionalmente patrones estructurales, pero les cuesta justificar sus afirmaciones de manera consistente o generalizable.
En conjunto, los resultados muestran que las dificultades no se reducen a "saber o no saber el método", sino a la falta de articulación entre modos. Los mejores desempeños no se apoyaron en un único enfoque, sino en la coordinación entre: (a) imágenes espaciales consistentes (sintético-geométrico), (b) procedimientos confiables y transparentes (analítico- aritmético) y (c) argumentos sobre la estructura del sistema (analítico-estructural). Los errores surgieron donde faltó esa coordinación, pues aparecieron respuestas fragmentadas: cálculos sin interpretación, dibujos sin sustento algebraico o afirmaciones estructurales sin contraste con el caso concreto. Esta conclusión coincide con Sierpinska (2000), quien afirma que la comprensión profunda en Álgebra Lineal depende precisamente de la coordinación entre lo geométrico, lo procedimental y lo estructural.
Desde una perspectiva didáctica, los hallazgos de este estudio refuerzan la necesidad de diseñar propuestas de enseñanza que promuevan, de manera intencional, la articulación de los tres modos de pensamiento. Diversos estudios han señalado la limitada disponibilidad de materiales didácticos orientados a desarrollar en los estudiantes la capacidad de movilizar y coordinar de forma flexible distintas representaciones matemáticas (Sandoval & Possani, 2016). En concordancia con estos planteamientos y a partir de los resultados obtenidos, se proponen las siguientes recomendaciones:

- Diseñar secuencias que obliguen a transitar entre registros (Duval, 2006);
- usar herramientas tecnológicas dinámicas para facilitar la exploración, manipulación y representación de objetos tridimensionales, favoreciendo una comprensión más profunda de las relaciones geométricas involucradas;
- introducir variación de condiciones para promover generalización y evitar el "cálculo por inercia"; y valorar la justificación escrita: pedir que, en cada solución, el estudiante identifique el tipo de conjunto y por qué

CONCLUSIÓN

En síntesis, este estudio permitió distinguir cómo se configuran y se articulan los modos de pensamiento en la comprensión del conjunto solución de sistemas 3×3 en estudiantes de Ingeniería. Los resultados evidencian que, aunque el estudiantado moviliza los modos sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, lo hace de manera fragmentada, con dificultades para establecer conexiones entre representaciones, procedimientos y propiedades. Estos hallazgos confirman la persistencia de un razonamiento predominantemente operativo y aportan evidencia sobre los principales obstáculos conceptuales asociados a este contenido. Futuras investigaciones podrían ampliar la muestra, incorporar

entrevistas para un análisis más a profundidad y diseñar intervenciones que evalúen cómo actividades específicas fortalecen la coordinación entre los modos sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural.
Finalmente, se destaca la necesidad de diseñar orientaciones didácticas que favorezcan la coordinación intencional entre los distintos modos de pensamiento, promoviendo una comprensión más integrada y significativa del conjunto solución en el Álgebra Lineal.

REFERENCIAS

Aredo Alvarado, M. A., & Ugarte Guerra, F. J. (2019). La didáctica de la matemática y el álgebra lineal. *Quintaesencia*, *10*, 27–32. https://doi.org/10.54943/rq.v10i.119

Arnawa, I. M., Yerizon, Nita, S., & Tri Putra, R. (2019). Development Of Students' Worksheet Based On APOS Theory Approach To Improve Student Achievment In Learning System Of Linear Equations. *International Journal of Scientific & Technology Research*, *8*(04). www.ijstr.org

Birinci, D. K., Delice, A., & Aydın, E. (2014). University Students' Solution Processes in Systems of Linear Equation. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *152*, 563–568. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.09.244

Cárcamo, A. D., Fuentealba, C. E., y Tauler, F. J. (2021). Concepciones sobre sistemas de ecuaciones lineales de 3x2 con solución vacía: un estudio exploratorio con estudiantes universitarios. *Formacion Universitaria*, *14*(1), 217–224. https://doi.org/10.4067/S0718-50062021000100217

Dogan, H. (2018). Mental Schemes of: Linear Algebra Visual Constructs. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 219–239). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_10

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143–168.

Harel, G. (1989). Applying the Principle of Multiple Embodiments in Teaching Linear Algebra: Aspects of Familiarity and Mode of Representation. *School Science and Mathematics*, *89*(1), 49–57. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1989.tb11889.x

Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 69–95. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.02.007

Hillel, J., & Sierpinska, A. (1993). On one persistent mistake in linear algebra. *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* , *3*, 65–72.

Kinley, M. (2016). Grade Twelve Students Establishing the Relationship Between Differentiation and Integration in Calculus Using graphs. *IEJME-Mathematics Education*, *11*(9), 3371–3385. https://doi.org/10.6084/m9.figshare.19070378.v1

Mutambara, L. H. N., & Bansilal, S. (2022). A case study of in-service teachers' errors and misconceptions in linear combinations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(11), 2900–2918. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1913656

Ochoviet Filgueiras, T. C. (2010). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Tesis de doctorado. Instituto Politécnico Nacional.

Oktaç, A. (2018). Conceptions About System of Linear Equations and Solution. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 71–101). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_4

Parraguez González, M., & Bozt Ortiz, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistemas de ecuaciones lineales en R^2 y R^3 desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación En Educación En Ciencias*, *7*(1), 49–72. https://doi.org/10.54343/reiec.v7i1.82

Parraguez González, M., Guerra Martínez, R., y Lezama Andalón, F. J. (2023). Comprensión del producto cruz: Un estudio de caso en la formación de profesores. *Innovación Educativa*, *23*(91), 87–113.

Randolph, V. N., & Parraguez, M. C. (2019). Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. *Formación Universitaria*, *12*(6), 57–82. https://doi.org/10.4067/S0718-50062019000600057

Reyna Segura, A. M. (2021). *Modos de pensamiento en la interpretación geométrico y analítico de los sistemas de ecuaciones Lineales en los estudiantes del I ciclo de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Callao, 2020* [Universidad Nacional del Callao]. https://hdl.handle.net/20.500.12952/5749

Rodríguez Jara, M. A., Mena Lorca, A., Mena Lorca, J. J. F., Vásquez Saldias, P., & Del Valle Leo, M. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Ensenanza de Las Ciencias*, *37*(1), 71–92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194

Rodríguez, M., Mena-Lorca, A., Gregori, P., Vásquez, P., del Valle, M., & Parraguez, M. (2022). Comprensión del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas: un estudio de casos. *Educacion Matematica*, *34*(3), 163–193. https://doi.org/10.24844/EM3403.06

Rozas-Torres, E., Cárcamo, A., & Fortuny, J. M. (2024). Concepciones Previas sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales: un Estudio Exploratorio con Estudiantes Universitarios. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *38*. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230153

Sandoval, I., & Possani, E. (2016). An analysis of different representations for vectors and planes in R^3. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(1), 109–127. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9675-2

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209–246). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Şimşek, M. C., & Turanlı, N. (2024). Pre-service Mathematics Teachers' Modes of Thinking in Linear Algebra: The Case of Linear Transformation. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, (62), 2988–3004. https://doi.org/10.53444/deubefd.1481905

Trigueros, M. (2018). Learning Linear Algebra Using Models and Conceptual Activities. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 29–50). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_2

Trigueros, M., & Wawro, M. (2020). Linear Algebra Teaching and Learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 474–478). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100021

Zandieh, M., & Andrews-Larson, C. (2019). Symbolizing while solving linear systems. *ZDM - Mathematics Education*, *51*(7), 1183–1197. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01083-3

Zandieh, M., Wawro, M., & Rasmussen, C. (2017). An Example of Inquiry in Linear Algebra: The Roles of Symbolizing and Brokering. *PRIMUS*, *27*(1), 96–124. https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1199618

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America.